



Ekonometrija – I deo

Doktorske studije

Predavač: Aleksandra Nojković

Beograd, školska 2025/26



Struktura predavanja

- Klasični višestruki linearni regresioni model-posebne teme:
- Multikolinearnost
 - pojam i posledice
 - metodi otkrivanja i otklanjanja
- Veštačke promenljive
- Narušavanje pretpostavki KLRM: Slučajna greška nema normalnu raspodelu

Pretpostavke KLRM (višestrukog)

1. $E(\varepsilon_i)=0$, za svako i .
2. $Var(\varepsilon_i)=E(\varepsilon_i^2)=\sigma^2$, za svako i .
3. $Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j)=E(\varepsilon_i \varepsilon_j)=0$, za svako i, j , tako da $i \neq j$.
4. $E(\varepsilon_i X_i)=0$, za svako i .
5. $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$.
6. Ne postoji tačna linearna zavisnost između objašnjavajućih promenljivih (tj. jedna objašnjavajuća promenljiva nije linearna funkcija druge).

Multikolinearnost

- Jedna od pretpostavki KLRM: odsustvo linearne zavisnosti između objašnjavajućih promenljivih.
- U slučaju **perfektne linearne zavisnosti** nije moguće dobiti ocene parametara metodom ONK.

- Ako posmatramo populacionu regresionu jednačinu:

$$E(Y) = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2,$$

koja se ocenjuje na bazi uzorka u kome važi:

$$X_{1i} = I_0 + I_1 X_{2i} \text{ za svako } i.$$

- Ocene parametara β_0 , β_1 i β_2 nisu jednoznačne (dobija se sistem od dve jednačine sa tri nepoznata parametra, **pokazati...**).

Dvostruki KLRM

- U modelu sa dve objašnjavajuće promenljive:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \varepsilon,$$

osnovni pokazatelj korelisanosti između objašnjavajućih promenljivih je koeficijent korelacije:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n x_{1i} x_{2i}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_{1i}^2 x_{2i}^2}}.$$

- Efekat dve ekstremne vrednosti za r (0 ili 1) se jasno uočava iz izraza za ocenu b_1 :

$$b_1 = \frac{\sum_{i=1}^n x_{1i} y_i \sum_{i=1}^n x_{2i}^2 - \sum_{i=1}^n x_{1i} x_{2i} \sum_{i=1}^n x_{2i} y_i}{\sum_{i=1}^n x_{1i}^2 \sum_{i=1}^n x_{2i}^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_{1i} x_{2i} \right)^2} = \frac{r_{yx_1} - r_{yx_2} r_{x_1 x_2}}{1 - r_{x_1 x_2}^2} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n y_i^2}{\sum_{i=1}^n x_{1i}^2}}.$$

Dvostruki KLRM: visoka multikolinearnost

- Ako je $|r|$ blizu vrednosti 1, smatra se da je multikolinearnost visoka.
- Ocene ONK se mogu dobiti, ali se dovodi u pitanje njihova preciznost:

$$s_{b_1}^2 = \frac{s^2}{(1 - r^2) \sum_{i=1}^n x_{1i}^2}.$$

- Posledice: povećanje standardnih greški ocena, proširenje intervala poverenja (neprecizne ocene), smanjuju se t -odnosi (neopravdano prihvatanje H_0).

Visoka multikolinearnost

- U praksi se gotovo nikad ne sreću dva pomenuta ekstrema, **odnosno izvestan stepen korelisanosti** između objašnjavajućih promenljivih **uvek postoji**.
- **Problem** nastaje onda kada je **korelisanost značajno izražena** (nedostatak nezavisnih varijacija promenljivih na desnoj strani jednačine).
- Postoji više razloga za pojavu multikolinearnosti – objasniti!

Neke od činjenica vezane za prisustvo multikolinearnosti

- Ocene ONK **ostaju NLNO**, ali značajnost ocenjenih parametara značajno opada.
- Nema jasnih kriterijuma koji nivo linearne zavisnosti je štetan za preciznost ocena regresionih koficijenata.
- **Pitanje stepena**, a ne postojanja (ne pravi se razlika između prisustva i odsustva multikolinearnosti).
- Isti nivo multikolinearnosti može imati različite efekte na rezultate ocenjivanja, u zavisnosti od opšte valjanosti modela.
- Odnosi se na stanje objašnjavajućih promenljivih, koje se u opštem slučaju smatraju nestohastičkim; **karakteristika je uzorka, a ne populacije** (meri se u svakom uzorku od interesa istražачa).

Problem multikolinearnosti?

- Nije pitanje „ima ili nema“ multikolinearnosti.
- Greene: Više je pitanje stepena, tj. „crvenila“



- Podaci u uzorku su uvek manje ili više lin. zavisni, pa je pitanje „nijansi“.

Posledice visoke multikolinearnosti

- **Ocene** regresionih parametara mogu biti **neprecizne**, u smislu većih standardnih greški i širih intervala poverenja.
- **Niže vrednosti t-statistika** (pogrešan zaključak o potrebi izostavljanja pojedinih promenljivih iz modela).
- Visoka vrednost F-statistike je praćena niskim vrednostima t-statistika (uticaj regresora se ne može precizno razdvojiti).
- **Ocene vrlo nestabilne**, osetljive na promenu uzorka, moguće je dobiti i **pogrešan znak** regresionog koeficijenta (široki inter. poverenja).
- Ocene su vrlo osetljive na isključivanje pojedinih promenljivih (zbog visokih kovarijansi ocena).

Utvrdjivanje postojanja multikolinearnosti

- Nije posledica svojstava osnovnog skupa, tako da **ne postoje formalni testovi** za njeno utvrđivanje (statistički testovi se zasnivaju na hipotezama o određenim vrednostima parametara osnovnog skupa).

1) Vrednost koeficijenta korelacije

a) U dvostrukoj regresiji:

- veće vrednosti koeficijenta korelacije r (0,7 ili 0,8)
- korisno je poređenje r^2 i R^2 (izražena je multikolinearnost za r^2 veće od R^2 , odnosno r veće od r_{yx1} i r_{yx2}).

b) U višestrukoj regresiji (r nije pouzdan pokazatelj):

- statistička značajnost pomoćnih regresija jedne objašnjavajuće promenljive na ostale u modelu (Kleinovo pravilo, $\text{kor.}R^2 \geq \text{kor.}R_j^2$).

Utvrđivanje postojanja multikolinearnosti (nastavak)

2) **Faktor rasta varijanse** (FRV; eng. *Variance-Inflation Factor*, *VIF*).

- a) Za dvostruki linearni regresioni model (**pokazati: prirast varijanse** zbog pojave $(1-r^2)$ u brojiocu za varijansu ocene **dvostruke u poređenju sa jednostavnom** regresiji):

$$FRV = \frac{1}{1-r^2}.$$

- b) Za višestruki regresioni model (slično, prirast se javlja zbog pojave $(1-R_j^2)$ u brojiocu izraza za varijansu ocene višestruke u poređenju sa jednostavnom regresijom):

$$FRV = \frac{1}{1-R_j^2},$$

gde je R_j^2 koeficijent determinacije u modelu u kome je objašnjavajuća promenljiva X_j regresirana na ostale objašnjavajuće promenljive.

R_j^2 i odgovarajuće vrednosti FRVj

R_j^2	0	0.5	0.8	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999
FRVj	1	2	5	10	20	40	100	200	1000

Tumačenje izračunatih vrednosti za FRV

- Za $r=1$ (odnosno $R_j^2=1$) vrednost nije moguće odrediti.
- FRV je jednak 1 za objašnjavajuće promenljive koje su ortogonalne (za $r=0$, odnosno $R_j^2=0$).
- Vrednost FRV je veća za izraženiju multikolinearnost (visoka za vrednosti preko 10).

Šta raditi?

- U otklanjanju visoke mulikolinearnosti treba voditi računa o cilju istraživanja.
- ništa ne preduzimati ako su *t-odnosi* veći od 2.
- ako je **cilj istraživanja previđanje**: važnije je minimizirati *s*, od preciznog ocenjivanja parametara.

Moguća rešenja:

- Povećanje obima uzorka (raste vrednost $\sum x_{1i}^2$).
- Korišćenje spoljnih ocena (opravdanih eksternih ograničenja).
- Transformacija polaznih promenljivih.
- Izostavljanje iz modela one promenljive za koju se sumnja da je glavni uzrok visoke korelacije.
- Metod glavnih komponenata (*engl. Principal Component Analysis; PCA*)



Veštačke promenljive

- Koriste se da opišu uticaj kvantitativno nepromenljivih faktora na kretanje izabrane zavisne promenljive
 - U podacima preseka: potrošnja može zavisiti od starosnih, polnih, regionalnih, verskih i drugih razlika.
 - U podacima vremenskih serija: sezonski efekti, efekti intervencija i strukturnog loma.
- Definišu se tako da uzimaju vrednost 1 za jedan modalitet i 0 za drugi modalitet.

Veštačke promenljive (primeri primene)

- Najčešće obuhvataju uticaje neekonomske prirode: kvalitativne faktore (pol, bračno stanje, zanimanje, članstvo u sindikatu, pripadnost određenoj rasi, religijske i kulturne razlike) ili privremene efekte (promene u institucionalnom i političkom okruženju, ratni periodi, sezonski efekti).
- Međutim, mogu obuhvatati i šire grupe kvantitativnih efekata (dohodak ili godine starosti, kada je dovoljno odabrati nekoliko karakterističnih, širih grupa: npr. potrošači do i preko 35 godina ili oni sa dohotkom do 40000 din, između 40000-60000 din. i preko 60000 din.).

Načini uvođenje u model

- Ispitujemo zavisnost potrošnje datog proizvoda (Y) od dohotka (X_1) prema uzorku koji se sastoji od gradskih i seoskih domaćinstava):

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \varepsilon_i, \quad i=1, 2, \dots, n$$

Razlika se može ispoljiti u promeni:

1. vrednosti odsečka – slobodnog člana (β_0)
2. vrednost nagiba – marginalne sklonosti ka potrošnji (β_1) i
3. vrednost odsečka i nagiba (β_0 i β_1).

Promena vrednosti odsečka (β_0)

Model koji obuhvata regionalne razlike u nivou potrošnje uključuje veštačku promenljivu V , definisanu kao:

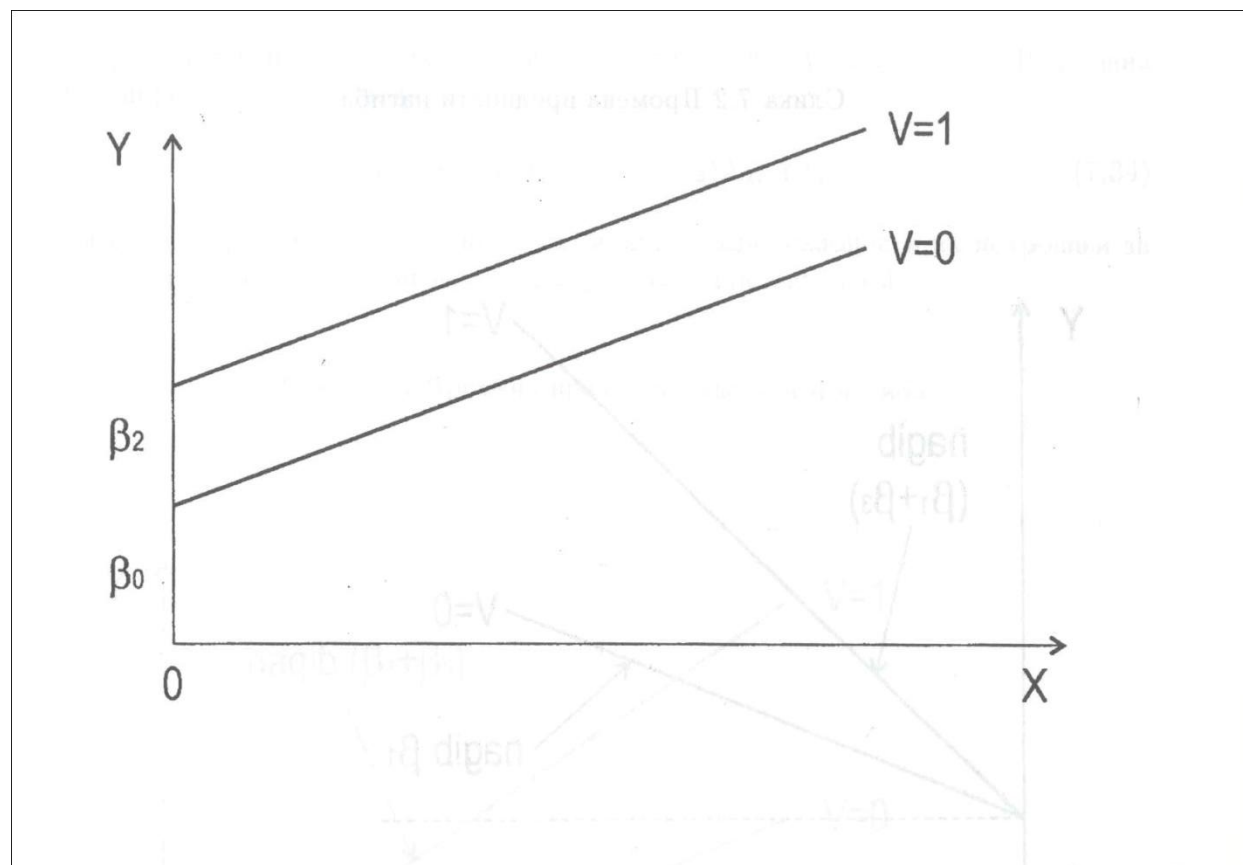
$$V = \begin{cases} 0, & \text{za seoska dom.} \\ 1, & \text{za gradska dom.} \end{cases}$$

- Polazni model postaje:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 V + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

- Odnosno model postaje:
 - za $V = 0$ (seoska dom.): $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \varepsilon_i$.
 - za $V = 1$ (gradska dom.): $Y_i = (\beta_0 + \beta_2) + \beta_1 X_{1i} + \varepsilon_i$.

Grafički prikaz promene vrednosti odsečka (β_0)



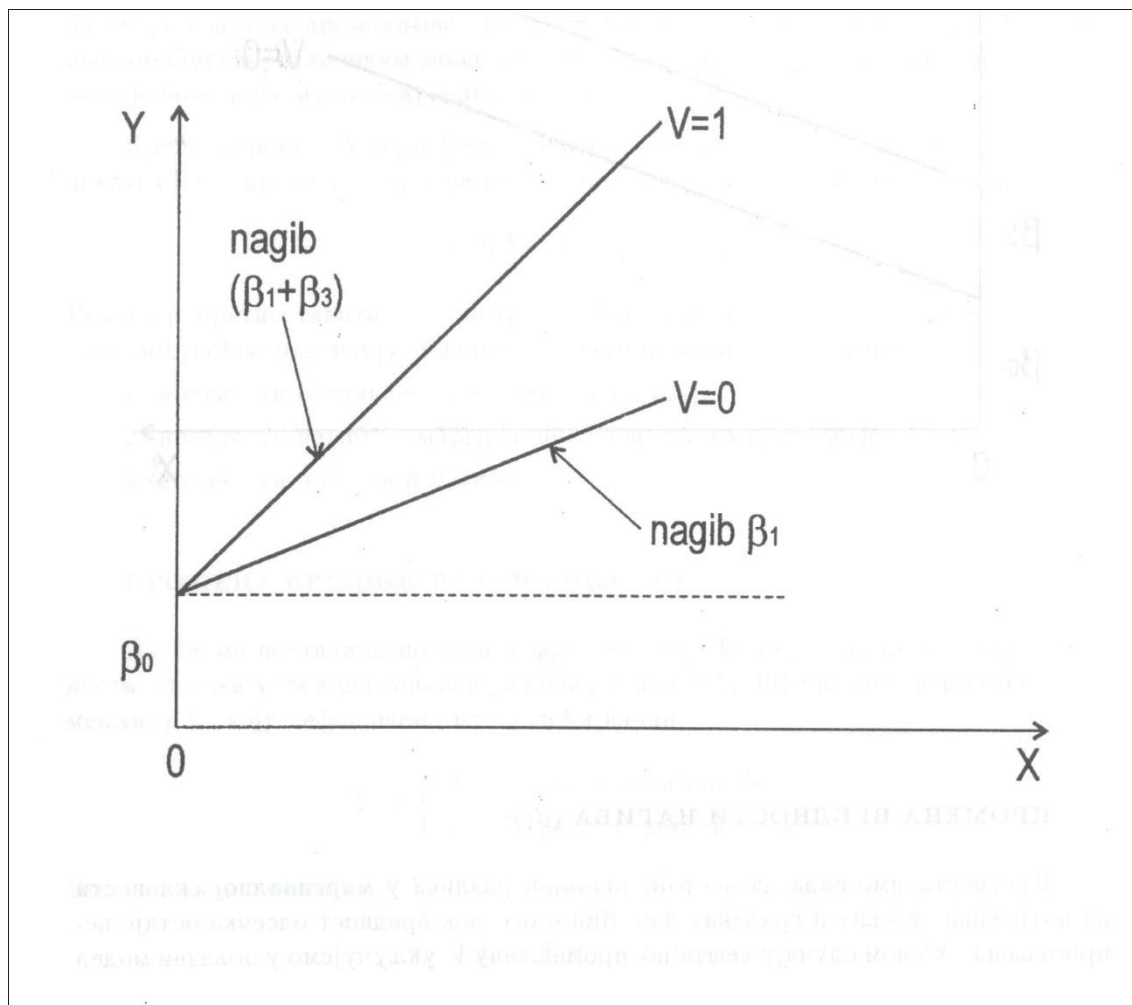
Promena vrednosti nagiba (β_1)

- Ako pretpostavimo da postoji značajna razlika u marginalnoj slonosti ka potrošnji gradskih i seoskih domaćinstava, veštačka promenljiva se uvodi kao:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_3 V X_{1i} + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

- Ovom relacijom obuhvaćena su dva modela:
 - za $V = 0$ (seoska dom.): $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \varepsilon_i$.
 - za $V = 1$ (gradska dom.): $Y_i = \beta_0 + (\beta_1 + \beta_3) X_{1i} + \varepsilon_i$.

Grafički prikaz promene vrednosti nagiba (β_1)



Promena vrednosti odsečka i nagiba (β_0 i β_1)

- Polaznu funkciju proširujemo sa dve promenljive V i VX_i i model postaje:

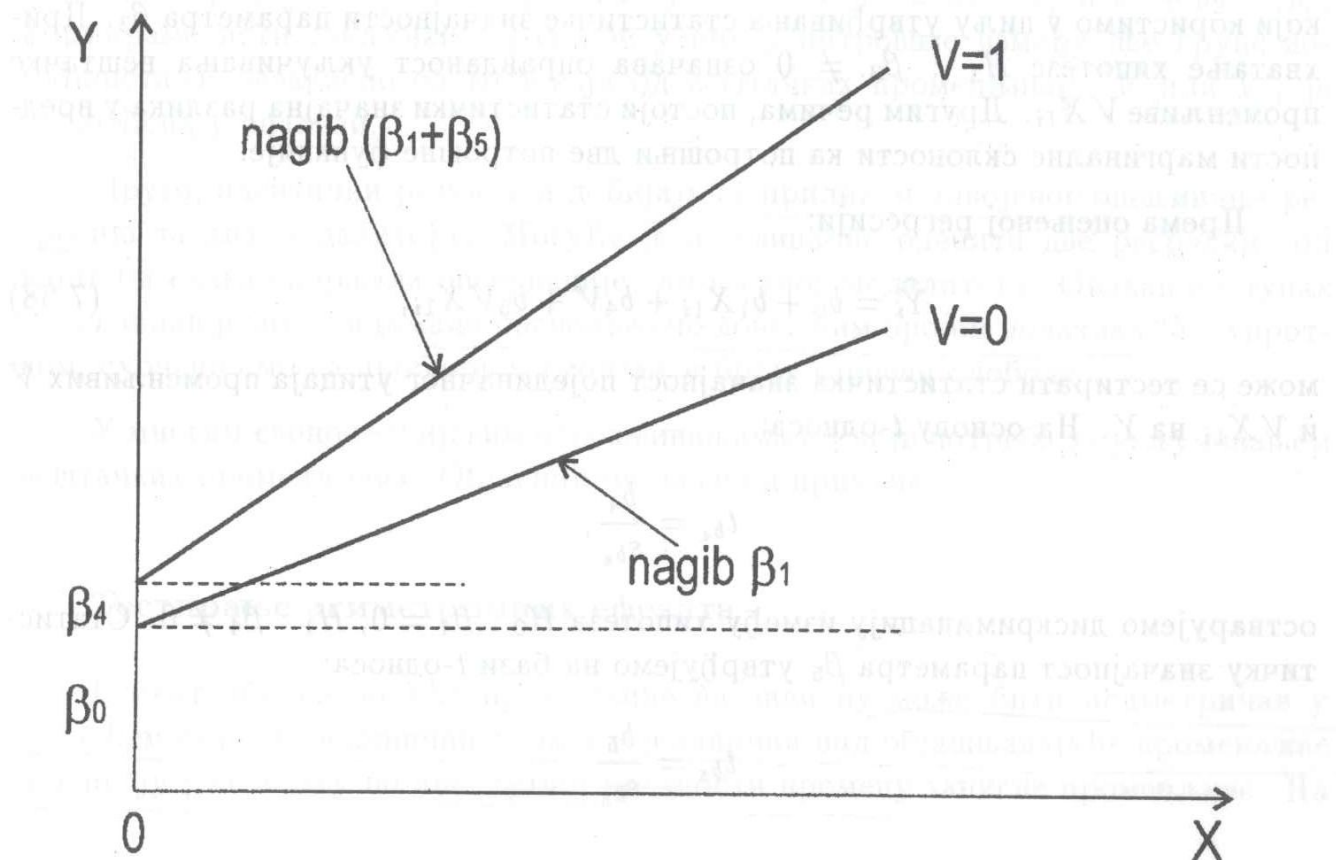
$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_4 V + \beta_5 VX_{1i} + \varepsilon_i.$$

- Jednačinu je moguće raščlaniti na dve funkcije:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \varepsilon_i, \text{ za seoska domać.}$$

$$Y_i = (\beta_0 + \beta_4) + (\beta_1 + \beta_5) X_{1i} + \varepsilon_i, \text{ za gradska domać.}$$

Grafički prikaz promene vrednosti odsečka (β_0) i nagiba (β_1)



Interakcija različitih faktora

- Za istraživanje interakcije različitih faktora formiraju se nove veštačke promenljive kao proizvodi već definisanih veštačkih promenljivih.
- Ako pretpostavimo da se ocenjuje uticaj pola i dve kategorije domaćinstava (gradska i seoska) na potrošnju nekog proizvoda, onda model postaje:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 V_1 + \beta_3 V_2 + \beta_4 V_3 + \varepsilon_i,$$

gde su veštačke promenljive definisane kao:

$$V_1 = \begin{cases} 0, & \text{za seoska dom.} \\ 1, & \text{za gradska dom.} \end{cases} \quad i \quad V_2 = \begin{cases} 0, & \text{za muškarce} \\ 1, & \text{za žene} \end{cases}$$

$$\text{dok je interakcija } V_3 = V_1 V_2 = \begin{cases} 1, & \text{za žene u gradskim dom.} \\ 0, & \text{za ostale kategorije s tan.} \end{cases}$$

Pravila ocenjivanja modela sa veštačkim promenljivima

- Dodeljivanje vrednosti 0 i 1 za pojedine modalitete potpuno je proizvoljno i ne menja konačne zaključke.
- Broj veštačkih promenljivih uvedenih u model uvek je za jedan MANJI od broja modeliteta (izbegavamo " zamku veštačke promenljive ").
- Identični rezultati dobijaju se ocenjivanjem dve odvojene regresije, kada raspoložemo dovoljnim brojem podataka.

Testiranje sezonskih efekata

- Izražena sezonska priroda pojedinih ekonomskih promenljivih modelira se uvođenjem sezonskih veštačkih promenljivih.
- Na primer, potrošnja sladoleda *pre capita* (Y) zavisi od realnog dohotka (X_1), relativne cene (X_2) i godišnjeg doba, što predstavljamo modelom:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 S_1 + \beta_4 S_2 + \beta_5 S_3 + \varepsilon_i,$$

gde smo sa S_1 , S_2 i S_3 označili sezonske veštačke promenljive definisane kao:

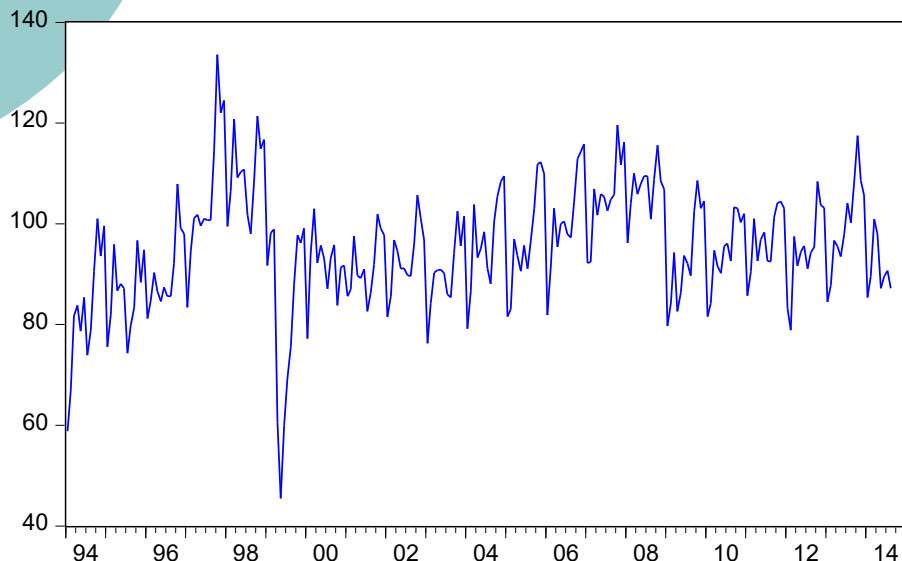
$$S_i = \begin{cases} 1, & \text{za opservacije } i - \text{tog } k \text{ var tala } (i = 1, 2 \text{ ili } 3) \\ 0, & \text{u ostalim } k \text{ var talima} \end{cases}$$

- Dovoljne su TRI veštačke promenljive za obuhvatanje ČETIRI modaliteta !

Sezonski karakter vremenskih serija srpske privrede

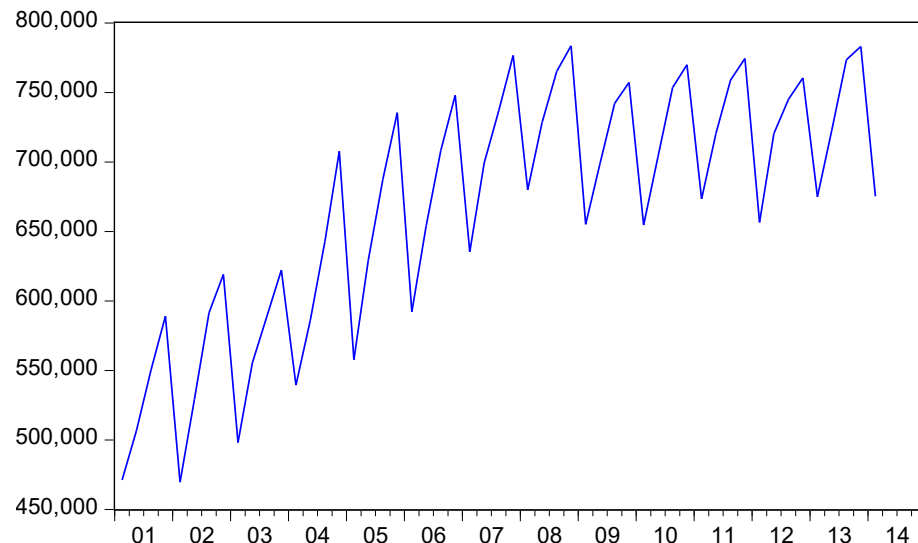
Mesečni podaci

Indeks industrijske proizvodnje - privreda Srbije (2013=100)



Kvartalni podaci

Bruto domaci proizvod Republike Srbije





Sta kada je zavisna promenljiva veštačka?

Mikroekonometrijski modeli
kvalitativene (diskretne) zavisne
promenljive: LMV, probit i logit (nisu
predmet razmatranja ovog kursa).

KLRM pretpostavka 5: Slučajna greška ima normalnu raspodelu

- Ukoliko je samo ova pretpostavka narušena primenom metoda ONK se dobijaju najbolje linearne nepristrasne ocene.
- Postupak statističkog zaključivanja je pogrešan
- **Testiranje hipoteza je nepouzđano.**

Kako se proverava pretpostavka da slučajna greška ima normalnu raspodelu?

- Neformalni (grafički) metodi – Analiza histograma
- Formalno testiranja - Žark-Bera (engl. Jarque-Bera) test normalnosti

Koeficijenti kojima se opisuju svojstva raspodela

- Empirijska raspodela se opisuje sa dva koeficijenta: asimetrije i spljoštenosti.
 - Koeficijent asimetrije meri stepen u kojem raspodela nije simetricna oko srednje vrednosti (simetricna raspodela, asimetricna u levo ili u desno), $a_3:N(0, 6/n)$.
 - Koeficijent spljoštenosti meri debljinu repa raspodele, $a_4:N(3, 24/n)$.
- Kada postoje ekstremni događaji tada su repovi teži od repova normalne raspodele
- Veca spljoštenost – repovi su lakši
 - Manja spljoštenost – repovi su teži.

JB test statistika

- Način izračunavanja:

$$JB = z_3^2 + z_4^2 = \frac{T}{6} \left[\hat{\alpha}_3^2 + \frac{(\hat{\alpha}_4 - 3)^2}{4} \right] : \chi_2^2$$

- Postupak testiranja:

H₀: serija ima normalnu raspodelu ($\alpha_3 = 0$ i $\alpha_4 = 3$).

H₁: serija nije normalno raspodeljena ($\alpha_3 \neq 0$ i / ili $\alpha_4 \neq 3$).

- Kritična vrednost na nivou značajnosti 5% je 5.99 (važi asimptotski!)

Šta raditi u slučaju da raspodela odstupa od normalne?

- Ne postoji jedinstveno rešenje.
- Mogu se koristiti metode testiranja koje ne pretpostavljaju normalnost, ali su one izuzetno komplikovane i njihova svojstva nisu poznata.
- Najčešće se modifikuje polazna specifikacija uključivanjem promenljivih kojima će **se eksplicitno modelirati ekstremni događaji**. Takve promenljive se nazivaju **veštačke promenljive**.