

# Mikroekonometrija

## Modeli višestrukog izbora

Master studije

Predavač: Aleksandra Nojković

Beograd, školska 2024/25

# Struktura predavanja

- **Modeli višestrukog izbora:**
  - Modeli nepoređanih alternativa (logit)
  - Modeli poređanog izbora (logit i probit)
- **Modeli vremenskih serija** sa diskretnom zavisnom promenljivom (binarnog i poređanog izbora)
- **Modeli brojivih podataka**

# Modeli višestrukog izbora (multivarijantni modeli probit i logit)

- Za modeliranje ponašanja (donošenja odluke) kada postoji više od dve alternative (moguća ishoda).
- Primeri više od dva modaliteta za kvalitativnu zavisnu promenljivu:
  - Analiza izbora zanimanja (radovi Schmidt-a and Strauss-a (1975a, 1975b): pet grupa zanimanja, od nekvalifikovanog radnika do profesionalca).
  - Izbor načina plaćanja (rad Mot and Cramer (1992): gotovina ili tri različite vrste čekova).
  - Analiza izbora prevoznog sredstva za putovanje na posao (Hensher (1986) i McMadden(1974)).

# Model slučajne korisnosti

- Izbor između više od dve alternative formalno se predstavlja slučajnom promenljivom  $y$  koja uzima vrednosti  $\{0, 1, \dots, J\}$ , gde je  $J$  pozitivan, ceo broj.
- Kako različiti faktori utiču na verovatnoću  $j$ -tog izbora ( $\text{Prob}(Y = j)$ , gde je  $j = 0, 1, \dots, J$ )?
- Polazi se od korisnost  $j$ -te alternative, **izabrane između  $(J + 1)$  mogućnosti**, za  $i$ -tu jed. posmatranja (potrošača, domaćinstvo ili preduzeće):

$$U_{ij} = \beta' z_{ij} + \varepsilon_{ij}.$$

- Izbor  $j$ -te alternative maksimizira korisnost u skupu  $(J+1)$  moguće alternative:

$$\text{Prob}(U_{ij} > U_{ik}) \text{ za svako } k \neq j.$$

# Model slučajne korisnosti (nastavak)

- Pretpostavka o funkciji raspodele slučajne greške ( $\varepsilon_{ij}$ ) - ispitujemo logit ili probit modele višestrukog izbora.
- Jednostavniji za primenu je višestruki logit model (engl. *Multinomial logit model*, MNL)
- U zavisnosti od polaznih pretpostavki predložene su različite specifikacije logit modela:
  - Uslovni logit model (engl. *Conditional logit model*, CLM)
  - Obuhvatni logit model (engl. *Nested logit model*, NLM)
  - Logit model uopštenih ekstremnih vrednosti (engl. *Generalized extreme value model*, GEVM)

# Logit model višestrukog izbora

- Verovatnoće ( $J+1$ ) izbora koji čini  $i$ -ta jedinica posmatranja:

$$\text{za } j = 1, 2, \dots, J: \text{ Prob}(Y_i = j) = \frac{e^{\beta_j' x_i}}{1 + \sum_{k=1}^J e^{\beta_k' x_i}}$$

$$\text{za } j = 0: \text{ Prob}(Y_i = 0) = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^J e^{\beta_k' x_i}}.$$

- Model se ocenjuje metodom maksimalne verodostojnosti, nelinearna funkcija se maksimizira poznatim iterativnim postupcima (Newton-ov metod i BHHH algoritam).
- Broj parametara MNL se značajno uvećava sa povećanjem broja alternativa.

# Logit model višestrukog izbora (nastavak)

- Dobijene ocene modela nemaju direktnu interpretaciju.
- Marginalni efekat promene karakteristika posmatranog  $i$ -tog pojedinaca na verovatnoću  $j$ -tog ishoda je:

$$\delta_j = \frac{\partial P_j}{\partial x_i} = P_j(\beta_j - \sum_{k=0}^J P_k \beta_k) = P_j(\beta_j - \bar{\beta}).$$

- **Svaki podvektor vektora  $\beta$**  utiče na veličinu marginalnog efekta svake od egzogenih promenljivih (kroz vrednost verovatnoće  $P_j$ , ali i kroz vrednost ponderisanog proseka koji figuriše u navedenom izrazu).
- Izračunata vrednost marginalnog efekta za određeno  $x_k$  ( $\partial P_j / \partial x_k$ ) **ne mora biti istog znaka** kao koeficijent  $\beta_{jk}$ .
- Rešavanjem MNL po  $\beta_j' x_i$  dobija se znatno jednostavnija interpretacija za  $\beta_j$ , pri čemu je logaritam količnika verovatnoće  $j$ -tog izbora :

$$\ln \left[ \frac{P_{ij}}{P_{i0}} \right] = \beta_j' x_i.$$

Npr. u slučaju četiri opcije (A, B, C i D), jedna opcija se obično bira kao bazna i kreiraju se tri indeksa: A/B, A/C i A/D. Kada su sva tri indeksa veća od 0 **bira se opcija A**.

# Logit model višestrukog izbora (nastavak)

- Normalizacijom po verovatnoći  $k$ -tog izbora dolazimo do logaritma količnika verodostojnosti bilo koja dva izbora  $j$  i  $k$ :

$$\ln \left[ \frac{P_{ij}}{P_{ik}} \right] = x_i' (\beta_j - \beta_k).$$

- Odnos verovatnoća  $P_j / P_k$  ne zavisi od preostalih izbora (ishoda, alternativa), što je posledica pretpostavke **o nezavisnosti slučajnih greški polaznog modela** (engl. *independence from irrelevant alternatives*, IIA) – omogućava unaređenje modela!
- Pokazatelji kvaliteta ovih modela: logaritam funkcije verodostojnosti modela, indeks količnika verodostojnosti (LRI), procenat tačnih predviđanja modela, kao i koeficijenti korelacije stvarnih i modelom predviđenih ishoda.
- Logit model nepogodan kada su alternative bliski supstituti. Tada probit model ima prednost, ali je komplikovan za numeričko ocenjivanje pa se retko koristi!



# Primer 1. Modeliranje odluke mladih muškaraca o nastavku školovanja ili zaposlenju

- Izvor: Greene (2002), podaci iz istraživanja Keane i Woplin (1997) o statusu na tržištu rada i obrazovanju mladića rođenih 1987. godine.
- Uzorak sadrži 1717 opservacija o statusu (0 – školovanje, 1 – nije ni na školovanju niti zaposlen, 2 – zaposlen). Ocenjen je jednostavna logit model koji je formulisan na sledeći način:

*Prob (status=j)=F(konstanta, obrazovanje, staž, staž<sup>2</sup>, rasa), j=0, 1 ili 2.*

- Pri tome 99 ispitanika ima status 0, 322 status 1, dok je njih 1286 zaposleno.
- Kategorija 0 – osoba je na školovanju je odabrana kao bazna kategorija.

# Logit model nepoređanog izbora: zavisna promenljiva (status 0, 1 ili 2)

Objašnjavajuće promenljive	status=1	status=2
obrazovanje	-0.6736*** (0.0699)	-0.3147*** (0.0651)
staž	-0.1062 (0.1733)	0.8487*** (0.1570)
staž <sup>2</sup>	-0.0125 (0.0252)	-0.0773*** (0.0229)
crn	0.8130*** (0.3027)	0.3114 (0.2815)
konstanta	10.2779*** (1.1333)	5.5438*** (1.0864)
Broj opservacija	1717	
Procenat tačnih predviđanja	79.6	
Log-verodostojnosti	-907.8572	
LR statistika (prob)	583.72 (0.000)	
Pseudo R <sup>2</sup>	0.2433	

- Dodatna godina školovanja smanjuje logaritam količnika verovatnoća ishoda 1 i 0 za 0.674. Slično, dodatna godina školovanja smanjuje logaritam količnika verovatnoća ishoda 2 i 0 za 0.315.
- Efekat pripadnosti afro-američkoj populaciji, zaključujemo da je veća verovatnoća da će ova osoba biti „kod kuće”, odnosno zaposlena u poređenju sa verovatnoćom da je na školovanju.

# Zakljuci iz višestrukog logit modela

- Interpretacija marginalnih efekata je znatno složenija, odnosno podrazumeva izračunavanje razlike u verovatnoćama za svaka dva ispitanika od interesa.
- Predviđene su verovatnoće tri moguća ishoda za svakog od ispitanika u uzorku, koje se sabiraju do 1.
- Poređenjem predviđenih sa stvarnim ishodima (statusom ispitanika), dobijamo da je ukupno tačno predviđen status za oko 80% ispitanika. Pri tome, najveći je procenat tačnih predviđanja za najzastupljeniji status da je osoba zaposlena (95.2%), dok su za ishode da je osoba na školovanju ili „kod kuće” ovi procenti znatno lošiji (12.1%, odnosno 39.2 %).

# Unapređenje MNL modela

- Logit model višestrukog izbora je odgovarajući kada specifičnosti različitih alternativa nisu predmet interesovanja ili nisu poznate.
- McFadden (1974) predlaže model u kome na verovatnoću izbora delimično utiču i **opaženi atributi različitih alternativa**. Model je u literaturi poznat kao McFadden-ov logit model ili uslovni logit model (engl. *conditional logit model*).
- Izvodi se iz modela slučajne korisnosti uz uvođenje pretpostavke o nezavisnosti ( $J+1$ ) slučajnih greški, za Weibull-ovu funkciju raspodele:

$$F(\varepsilon_{ij}) = \exp(-e^{-\varepsilon_{ij}}).$$

# Unapređenje MNL modela (nastavak)

- U tom slučaju se verovatnoća  $j$ -tog izbora može predstaviti kao:

$$\text{Prob}(Y_i = j) = \frac{e^{\beta' z_{ij}}}{\sum_{j=1}^J e^{\beta' z_{ij}}},$$

gde je  $z_{ij} = (x_{ij}, w_i)$ , gde se  $w_i$  odnosi na karakteristike pojedinca, koje ne variraju za različite alternative, dok  $x_{ij}$  varira u zavisnosti od opaženih karakteristika različitih alternativa, (komponente vektora  $x_{ij}$  se nazivaju atributi alternative, odnosno atributi različitih izbora), pa dobija sledeća funkcija verovatnoće  $j$ -tog izbora:

$$\text{Prob}(Y_i = j) = \frac{e^{\beta' x_{ij} + \alpha' w_i}}{\sum_{j=1}^J e^{\beta' x_{ij} + \alpha' w_i}} = \frac{e^{\beta' x_{ij}} e^{\alpha' w_i}}{\sum_{j=1}^J e^{\beta' x_{ij}} e^{\alpha' w_i}}$$

- Članovi koji **ne variraju za različite alternative**, dakle oni koji se odnose na karakteristike specifične za pojedince, **ne utiču na verovatnoću** izbora.

# Uslovni logit model

- McFadden-ov uslovni logit model je model u kome odnos verovatnoća ma koje dve alternative  $j$  i  $k$  ( $P_j / P_k$ ) zavisi samo od atributa tih alternativa, odnosno **ne zavisi od uvođenja novih alternativa u model**, ili promena karakteristika neke od postojećih alternativa.
- Uslovni logit model se najjednostavnije ocenjuje primenom Newton-ovog iterativnog postupka.
- Za uslovni logit model navode se već pominjani pokazatelji kvaliteta: procenat tačnih predviđanja i indeks količnika verodostojnosti. Za potrebe izračunavanja pseudo  $R^2$ , slično logit modelu višestrukog izbora, moguće je izračunati dve vrednosti logaritma funkcije verodostojnosti (polaznog i modela ocenjenog pod ograničenjem), kao i koef. korelacije stvarnih i modelom predviđenih ishoda.

# Nezavisnost od irelevantnih alternativa

- Restriktivna pretpostavka o nezavisnim i homoskedastičnim greškama modela (IIA) se definiše kao:

$$\ln \left[ \frac{P_j(x_j)}{P_k(x_k)} \right] = \frac{\beta' x_j}{\beta' x_k} = \beta' (x_j - x_k).$$

- **Ne važi za slične alternative!!!**
- Hausman i McFadden (1984): test-statistika za testiranje nulte hipoteze o opravdanost pretpostvake IIA:

$$\chi^2 = (\hat{\beta}_s - \hat{\beta}_f)' [V_s - V_f]^{-1} (\hat{\beta}_s - \hat{\beta}_f),$$

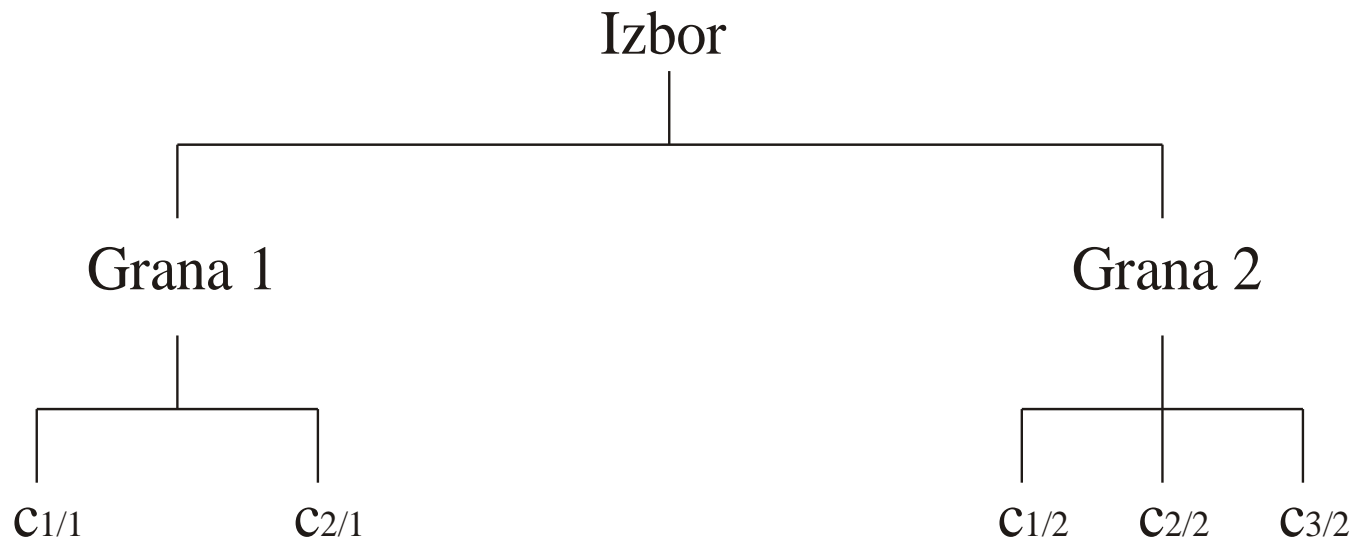
gde je ocena sa indeksom  $s$  dobijena na podskupu alternativa (konzistentna i asim. efikasna smao ako je  $H_0$  tačno), a ocena sa indeksom  $f$  je dobijena na celom skupu alternativa (konzistentna u oba slučaja).  $V_s$  i  $V_f$  su ocene asim. kov. matrica. Ako je razlika dobijenih ocena u ova dva slučaja statistički značajna, odnos verovatnoća dva izbora zavisi od razmatranog skupa alternativa.

# Dalje unapređenje uslovnog logit modela

- Dalje unapređenje ULM kroz manje restriktivne pretpostvake o slučajnoj greški.
- Probit model višestrukog izbora (teorijski inspirativan, ali podrazumeva izračunavanje integrala  $(J+1)$  reda.
- U model se uvodi hijerarhijska struktura, odnosno podela alternativa u podskupove (grupe). Dozvoljava se prisustvo heteroskedastičnosti (nejednakih varijansi) među različitim grupama, dok se zadržava pretpostavka o nezavisnosti od irelevantnih alternativa u okviru svake grupe.
- Obuhvatni logit model (engl. *Nested multinomial logit*, NMNL), da se skup od  $J$  alternativa može podeliti na  $L$  podskupova, predstavlja se na sledeći način:  $[c_1, \dots, c_J] = (c_{1/1}, \dots, c_{J/1}), \dots, (c_{1/L}, \dots, c_{J/L})$ . Izbor se može posmatrati kao izbor u dva stepena. U prvom stepenu vrši se izbor između  $L$  grupa, a zatim izbor između alternativa u okviru prethodno odabrane grupe. Ocenjuje se metodom MV.
- McFadden (1978, 1981) formuliše model uopštenih ekstremnih vrednosti (engl. *Generalized extreme value model-GEV*), koji predstavlja uopštenje polaznog uslovnog logit modela (može se **primeniti i za slučaj postojanja sličnih alternativa**).



# Dvostepeni obuhvatni logit model (stablo odlučivanja)



- Osnovni problem sama specifikacija hijerarhijske strukture modela, odnosno svrstavanje postojećih alternativa u odgovarajuće grane (grupe).
- Ukoliko ova podela ne proističe iz same prirode problema, za to ne postoje precizni testovi, a različita specifikacija modela dovodi do različitih rezultata ocenjivanja.

## Primer 2/2a. Uslovni LM za izbor načina putovanja

- Izvor: Hensher (1986) ocenjuje model izbora prevoznog sredstva za putovanje do posla na primeru stanovnika Sidneja.
  - Uzorak sadrži 1455 opservacija o izboru između četiri načina putovanja *car/driver (C/D)*, *car/passenger (C/P)*, *train and bus*.
- Slično, Hensher and Greene (2007) izbor načina putovanja između Sidneja i Melburna (avion vs. drumski saobraćaj: voz, autobus ili automobil).
  - Uzorak sadrži 210 ispitanika, kao funkcija ukupnih troškova putovanja, vremena trajanja putovanja, vreme čekanja prevoza (0 u slučaju automobila), odnosno troškovi parkinga i ukupan prihod porodice i sl.

# Logit i probit modeli poređanog izbora

- Primeri izbora između poređanih alternativa:
  - Ocena kreditne sposobnosti
  - Istraživanja javnog mnjenja i marketinška istraživanja
  - Istraživanje zaposlenosti (sa punim radnim vremenom, pola radnog vremena ili nezaposlen)
  - Izbor različitih nivoa osiguranja
  - Izbor programa medicinske zaštite
  - Interesantna primena: Bernholz i Kugler (2006) koji analiziraju uspešnosti mera preduzetih sa ciljem zaustavljanja više od 30 hiperinflacija u svetu.
- Dodeljen rang za npr. kreditnu sposobnost na skali od 0 do 6, ima ordinalni karakter, odnosno razlika između ranga 2 i 3 ne mora biti istog značaja kao razlika između ranga 4 i 3.

# Specifikacija modela poređanog izbora

- Polazimo od regresionog modela latentne zavisne promeljive  $y_i^*$  :

$$y_i^* = \beta' \mathbf{x}_i + \varepsilon_i.$$

- U praksi se opaža jeste promenljiva  $y_i$  koja se definiše na sledeći način:

$$y_i = 0 \text{ ako } y_i^* \leq 0$$

$$= 1 \text{ ako } 0 < y_i^* \leq \mu_1$$

$$= 2 \text{ ako } \mu_1 < y_i^* \leq \mu_2$$

...

$$= J \text{ ako } \mu_{J-1} \leq y_i^* , \quad \mu_1 < \dots < \mu_{J-1} < \mu_J$$

- Nepoznati parametri  $\mu_j$  ( $j = 1, 2, \dots, J$ ) se nazivaju tačke odsecanja (engl. *cut points*) ili parametri praga (engl. *threshold parameters*) i ocenjuju se zajedno sa vektorom  $\beta$ .

# Probit model poređanog izbora

- Za normalnu standardizovanu raspodelu slučajne greške  $\varepsilon_i$ , funkcija verovatnoće  $j$ -tog izbora se definiše kao:

$$\text{Prob}(y_i = 0) = \Phi(\mu_1 - \beta'x),$$

$$\text{Prob}(y_i = 1) = \Phi(\mu_2 - \beta'x) - \Phi(\mu_1 - \beta'x)$$

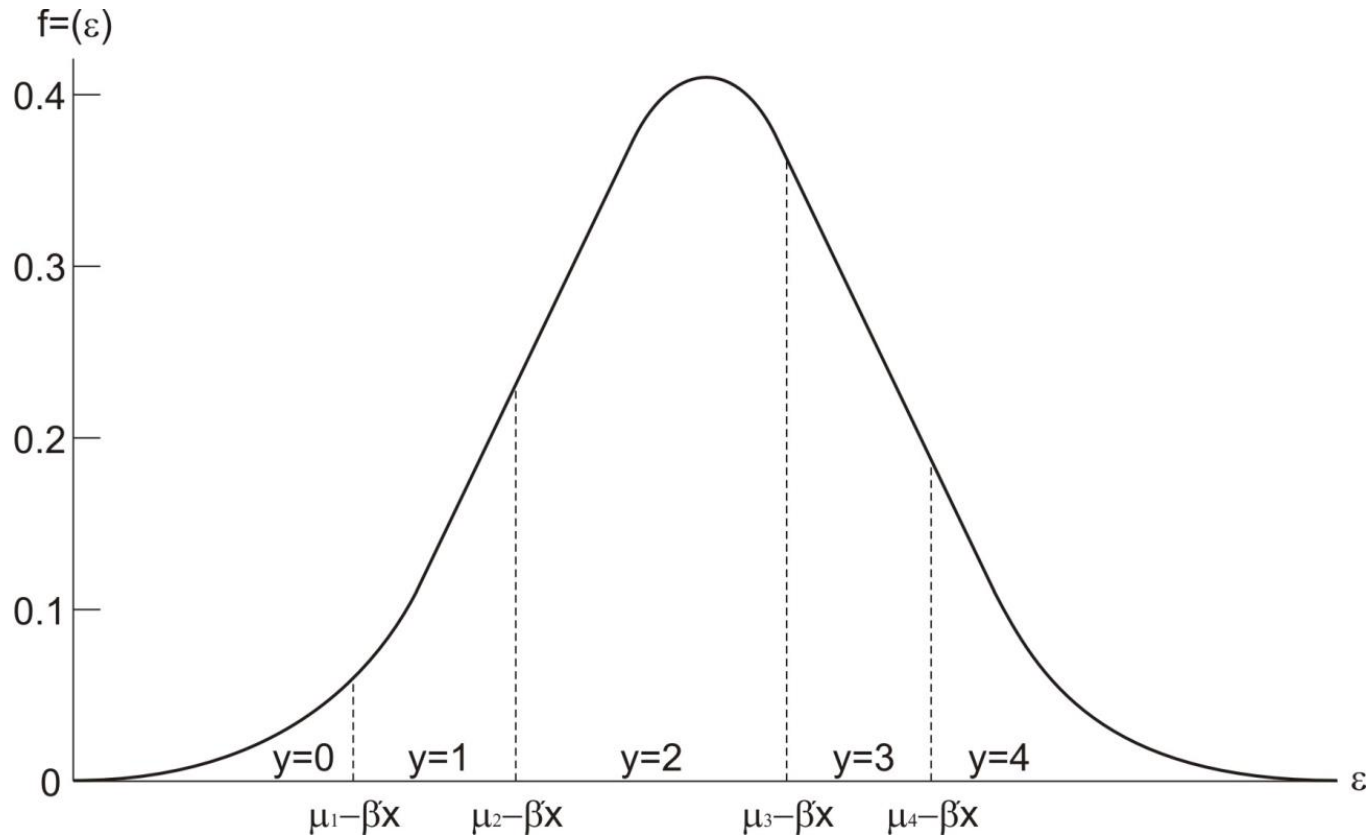
...

$$\text{Prob}(y_i = J-1) = \Phi(\mu_J - \beta'x) - \Phi(\mu_{J-1} - \beta'x),$$

$$\text{Prob}(y_i = J) = 1 - \Phi(\mu_J - \beta'x),$$

gde je  $\Phi(\cdot)$  oznaka za normalnu standardizovanu raspodelu, a  $\phi(\cdot)$  za odgovarajuću funkciju gustine.

# Funkcija gustine probit modela poređanih alternativa (npr. $J=4$ , $J+1=5$ mogućih ishoda)



# Marginalni efekti u modelu poređanog izbora

- Ocenjeni koeficijenti u ovom modelu nemaju direktnu interpretaciju.
- Marginalni efekat promene  $x_k$  na verovatnoću ostvarenja  $j$ -tog ishoda probit modela definisan je kao:

$$\frac{\partial \text{Prob}[y = 0]}{\partial x_k} = -\beta_k \phi(\mu_1 - \beta' x)$$

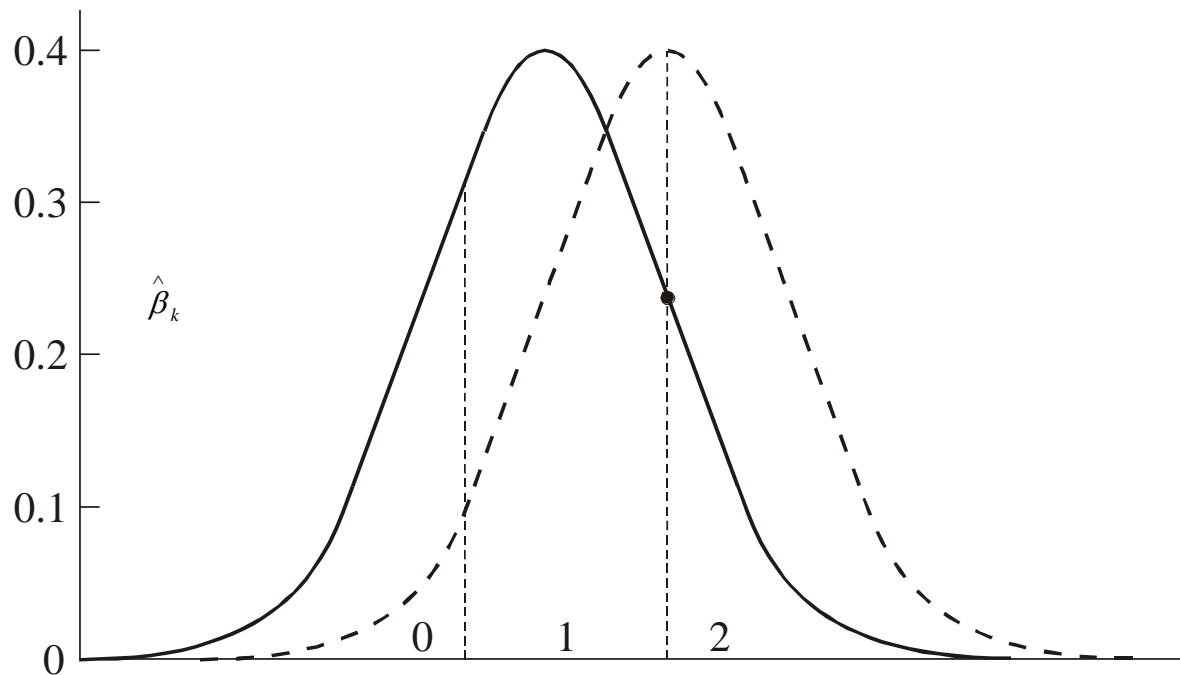
$$\frac{\partial \text{Prob}[y = j]}{\partial x_k} = \beta_k [\phi(\mu_{j-1} - \beta' x) - \phi(\mu_j - \beta' x)] \quad , \text{ za } 0 < j < J$$

$$\frac{\partial \text{Prob}[y = J]}{\partial x_k} = \beta_k \phi(\mu_J - \beta' x),$$

gde je  $\phi(\cdot)$  odgovarajuća funkcija gustine normalne raspodele, a slično se dobijaju odgovarajući marginalni efekti promene  $x_k$  logit modela.

- Verovarnoća  $\text{Prob}(y = 0)$  se menja u smeru suprotnom znaku  $\hat{\beta}_k$  izračunatog koeficijenta, dok se verovatnoća  $\text{Prob}(y = J)$  menja u smeru koji odgovara znaku koeficijenta.

Efekat promene x na predviđene verovatnoće  
u modelu poređanih alternativa  
(tri ishoda (0,1, i 2) i pozitivna ocena  $\hat{\beta}_k$  )





# Primer 3. Izbor penzionog plana

- Izvor: Wooldridge (2002) - *Asset allocation in pension plans*.
- Analizirana je razlika u mogućnosti da se izabere penzioni plan na sam ishod/odluku. Korisceni su podaci Papke(1998) gde su odgovori kodirani kao "pretežno obveznice", "mešavina" i "pretežno akcije" (engl. "*mostly bonds*", "*mixed*" and "*mostly stocks*") kao 0, 50 i 100.
- Opis promenljivih u modelu:
  - *choice* = binarna promenljiva, uzima vrednost 1 ukoliko je ispitanik mogao da bira tip penzionog fonda, a 0 u suprotnom slučaju.
  - Razmatrane su sledeće objašnjavajuće promenljive: obrazovanje, pol, rasa, bračni status, bogatstvo i prosečan prihod (uveden kroz set veštačkih promenljivih), kao i da li je u pitanju penzioni plan koji omogućava podelu profita (eng.*profit sharing*).

# Rezultati ocenjivanja (nastavak primera 3)

- ONK:  $\beta_{choice} = 12,05$  (12 % više onih koji biraju akcije).
- Probit:  $\beta_{choice} = 0,371$  (veličina koeficijenta nema dir. Interpretaciju, ali znak i statistička značajnost potvrđuju nalaz linearnog modela).
- Veličina (marginalni efekat) se mogu oceniti kao:  $E(y / x)$  pri čemu je  $choice = 1$  ili  $choice = 0$ .
- Kao ilustraciju koristiti: osobu staru 60 godina, sa 13,5 godina obrazovanja, samca, muškarca, belu osobu, sa godišnjim prihodima 50-75000\$ i bogatstvom u 1989. god. od 200000 \$.
- Za razliku u mogućnosti izbora ( $choice$  je 1 ili 0) ocenjene verovatnoće su 50,4 i 36,6 tako da je razlika u verovatnoći **12,8%**.
- Ukupan broj tačnih pogodaka modela je 44,3%.

# Mogućnosti primene u makroekonometrijskoj analizi

- Modeli diskretne zavisne promenljive veoma pogodni za opisivanje monetarane politike vođene u posmatranoj zemlji, odnosno modeliranje odluka centralne banke o promeni instrumenata monetarne politike (odluka o promeni nivoa kamatne stope ili potrebi da se interveniše na deviznom tržištu)
- Slično tome, za skup zemalja od interesa izbor optimalnog režima deviznog kursa, determinisanje uzroka pokretanja inflacije, predviđanje valutnih i finansijskih kriza, kao i recesije jesu neki od problema koje je moguće analizirati primenom metoda diskretne zavisne promenljive na podacima panela (veliko  $N$ , ali za razliku od tradicionalnih modela *relativno veliki* broj vremenskih jedinica  $T$ )
- ***Uvođenje dinamičkog aspekta*** u modele specifične zavisne promenljive zahteva izvesna prilagođavanja kako bi se obuhvatile *specifičnosti* razmatranih podataka makroekonomskih vremenskih serija i podataka panela (*nestacionarnost* i *heterogenost* jedinica posmatranja).

# Modeli makroekonomskih vremenskih serija sa diskretnom zavisnom promenljivom

- Polazi se od poznate specifikacije modela binarnog izbora:

$$y_t^* = x_t' \beta_0 + \varepsilon_t, \quad \text{za } t = 1, 2, \dots, n$$

$$y_t = \begin{cases} 1 & \text{ako } y_t^* \geq 0 \\ 0 & \text{ako } y_t^* < 0. \end{cases}$$

pri čemu je  $\beta_0$  vektor pravih vrednosti parametara (različita od nule), dok je  $x_t$  vektor objašnjavajućih promenljivih koje mogu biti  $I(0)$ ,  $I(d)$  ili  $I(1)$  ili njihova kombinacija.

- Tradicionalni modeli binarnog izbora razvijeni za potrebe analize uporednih podataka se zasnivaju na *restriktivnoj pretpostavci* o nezavisnosti opservacija uređenih u prostoru.
- Odluka o izboru između dve alternative se donosi na osnovu makroekonomskih promenljivih koje *poseduju stohastički trend* (poznato je da su vremenske serije poput nivoa realnog BDP, inflacije ili stopa nezaposlenosti veoma često nestacionarne prirode).
- Osnovu empirijskog istraživanja rada predstavlja asimptotska teorija izvedena iz postupka optimizacije nelinearnih funkcija integrisanih vremenskih serija (Park i Phillips, 2000).

# Modeli makroekonomskih vremenskih serija sa binarnom zavisnom promenljivom (II)

- Pokazana je asimptotska raspodela ocena MV (**mešavina normalnih raspodela**), čija je očekivana vrednost jednaka pravo vrednosti parametra i predložen postupak izračunavanja varijanse.
- Važan je nalaz o **dvojnim stopama konvergencije** ocena MV:
  - 1) Asimptotska svojstva ocena maksimalne verodostojnosti dominantno su određena komponentom koja ima sporiju stopu konvergencije ( $n^{1/4}$ ), što je i ukupna stopa konvergencije.
  - 2) Izmenjena brzina konvergencije je samo duž pravca koji je ortogonalan sa vektorom pravih vrednosti parametara (brža stopa  $n^{3/4}$ ).
- Ovo obezbeđuje da Wald-ova test-statistika ima asimptotsku  $\chi^2$  raspodelu i uobičajeni postupak testiranja.
- Dvojna stopa konvergencije ostaje odlika modela binarnog izbora i u prisustvu **promenljivih različitog reda integrisanosti** (prisutne su objašnjavajuće promenljive  $I(1)$  i  $I(0)$ ).

## Primer 4. Model binarnog izbora u analizi podataka vremenskih serija u cilju predviđanja recesije u SAD

- Istraživanje Kauppi i Saikkonen (2008) predstavlja unapređenje već postojećih dinamičkih probit modela (pored egzogenih objašnj. promenljivih i pomaknute vrednosti binarne zavisne promenljive (prethodno stanje ekonomije), uključena je i pomaknuta vrednost uslovne verovatnoća za pojavu recesije.
- Kvartalni podaci za period: 1955-2005. Recesija (binarna zavisna promenljiva 0/1), dok je osnovna objašnjavajuća promenljiva nestacionarna vremenska serija razlike u kamatnim stopama između 10-godišnjih stopa trezorskih obveznica i 3-mesečnih stopa trezorskih zapisa (*ks\_razlika*).
- Za ocenjivanje navedene specifikacije predložen je metod maksimalne verodostojnosti, kao i drugi metodi unapređenja samog modela i postupka ocenjivanja (videti: Chauvet i Potter, 2005).

## Primer 4. Model predviđanja recesije u SAD: zavisna promenljiva (*recesija*)

Objašnjavajuće promenljive	Model (1)		Model (2)		Model (3)		Model (4)	
<i>ks_razlikt</i> <sub>(t-4)</sub>	-0.77	***	-0.55	***	-0.57	***	-0.64	***
	(0.21)		(0.19)		(0.20)		(0.20)	
<i>recesija</i> <sub>(t-1)</sub>			1.79	***			2.4	
			(0.25)				(0.27)	***
<i>verovatnoća</i> <sub>(t-1)</sub>					0.44	***	-0.31	**
					(0.20)		(0.14)	
Pseudo R <sup>2</sup>	0.23		0.41		0.26		0.42	
Log-likelihood	-65.28		-40.86		-53.74		-39.56	
AIC	58.68		43.86		56.74		43.56	
SIC	61.98		48.81		62.00		52.20	

- U skladu sa teorijskim očekivanjima, ustanovljen je negativan i statistički značajan uticaj razlike u kamatnim stopama na verovatnoću pojave recesije u SAD.
- Potvrđena je vrlo solidna moć predviđanja ovih modela.
- Autori de Jong i Woutersen (2011) primenom Monte Carlo simulacije, potvrdili su relativno dobre osobine ocena dobijenih metodom maksimalne verodostojnosti.

# Modeli poređanog nestacionarnog izbora

- Polazi se od poznate specifikacije modela binarnog izbora:

$$y_t^* = x_t' \beta_0 + \varepsilon_t, \quad \text{za } t = 1, 2, \dots, n$$

pri čemu je  $\beta_0$  vektor pravih vrednosti parametara (različita od nule), dok je  $x_t$  vektor objašnjavajućih promenljivih koje mogu biti  $I(0)$ ,  $I(d)$  ili  $I(1)$  ili njihova kombinacija.

- Zavisnu promenljivu ne opažamo, već diskretnu promenljivu (indikator)  $y_t$  koja uzima jednu od  $(J + 1)$  mogućih vrednosti:

$$\begin{aligned} y_t &= 0 \text{ ako } y_t^* \in (-\infty, \sqrt{n}\mu_0^1) \\ &= 1 \text{ ako } y_t^* \in (\sqrt{n}\mu_0^1, \sqrt{n}\mu_0^2] \\ &\dots \\ &= J-1 \text{ ako } y_t^* \in [\sqrt{n}\mu_0^{J-1}, \sqrt{n}\mu_0^J] \\ &= J \text{ ako } y_t^* \in (\sqrt{n}\mu_0^J, \infty) \end{aligned}$$

pri čemu su param. praga pomnoženi sa  $\sqrt{n}$  kako bi bili istog reda veličine sa latentnom zavisnom promenljivom, za slučaj kada su elementi vektora  $x_t$  integrisane vremenske serije.



# Modeli poređanog nestacionarnog izbora (II)

- U istraživanju Hu i Phillips (2004a), odnosno Phillips, Jin i Hu (2007) formulisana je asimptotska teorija za modele poređanog višestrukog izbora.
- Uzoračka raspodela ocena maksimalne verodostojnosti svih nepoznatih parametara u modelu (parametara uz objašnjavajuće promenljive i parametara praga) asimptotski se približava **mešavini normalnih raspodela**.
- Prisustvo parametara praga različitih od nule značajno utiče na **brzinu konvergencije**, koja u modelu poređanog nestacionarnog izbora **ponovo postaje jedinstvena**. Svi parametri modela, uključujući i parametre praga imaju stopu konvergencije  $n^{3/4}$ .
- Prisustvo stacionarne promenljive u modelu utiče na ponovno pojavljivanje fenomena dvostruke brzine konvergencije: ocene parametara uz stacionarne objašnjavajuće promenljive sporije konvergiraju ka pravim vrednostima parametara, dok ocene ostalih parametara u modelu konvergiraju brže (važi i za parametre praga).

# Pokazatelji kvaliteta modela poređanog izbora

- Stvarne i modelom predviđene odluke npr. CB o promeni kamatne stope (tabelarno 3 x3).
- Navodi se još i statistika „*prilagođenog odnosa šumova/pogrešnih i ispravnih signala*“ (engl. “*adjusted noise to signal ratio*“), koju su predložili Kaminsky i drugi (1998). Ovi autori su predložili da se o zaključak o podudarnosti stvarnih odluka i predviđanja modela donosi računanjem sledećeg pokazatelja:

$$(B/(B+D))/(A/(A+C)), \text{ gde je:}$$

A – akcija je predviđena i u stvarnosti se to i dogodilo,

B – akcija je predviđena ali se to *nije realizovalo* u stvarnosti,

C – akcija nije predviđena, a u stvarnosti se dogodila,

D – akcija nije predviđena, *niti je u stvarnosti do nje došlo*.

- Koeficijent korelacije stvarnih i predviđenih odluka CB.

## Primer 5. Model poređanog izbora u modeliranju monetarne politike u tranzicionim ekonomijama koje ciljaju inflaciju

- U radu Nojković i Petrović (2015) analizirane su odluke centralne banke o diskretnom prilagođavanju kamatne stope u šest tranzicionih evropskih zemalja koje su prihvatile monetarnu politiku ciljanja inflacije.
- Za potrebe analize funkcije kamatne stope u otvorenim privredama pošlo se od modela:

$$i_t^* = d_1\pi_t + d_2z_t + d_3e_t + d_4i_{t-1} ,$$

koji, pored fundamentalnih ekonomskih promenljivih inflacije ( $\pi$ ) i proizvodnog jaza ( $z$ ), uključuje i realni devizni kurs ( $e$ ). Pri tome,  $i_t^*$  je optimalan nivo kamatne stope (nivo koji obezbeđuje ispunjenje ciljeva centralne banke), dok je  $i_t$  stvarni nivo kamatne stope

- Više razloga koji modele diskretnog izbora čine pogodnim za opisivanje ovako vođene monetarne politike:
- Omogućeno je istovremeno pronalaženje osnovnih faktora koji determinišu odluku centralne banke i parametara praga, odnosno odstupanje preko koga centralna banka interveniše.
- Mnogi od osnovnih makroekonomskih pokazatelja koji utiču na odluke monetarnih vlasti jesu nestacionarne vremenske serije.

# Specifikacija modela diskretnog izbora za opisivanje politike ciljanja inflacije

- Za opisivanje monetarne politike koja se oslanja na kamatnu stopu predložen je sledeći model:

$$y_t^* = \beta'X_t - \varepsilon_t, \quad \text{za } t= 1, \dots, n$$

$$y_t^* = i_t^* - i_{t-1},$$

pri čemu je  $i_t^*$  optimalni nivo kamatne stope (koji ne opažamo), dok vektor sadrži egzogene promenljive od kojih neke mogu biti nestacionarne.

- Latentna promenljiva  $y_t^*$  meri odstupanje optimalnog od stvarnog nivoa kamatne stopa, ali u realnosti nismo u mogućnosti da je opažamo.
- Ono što u praksi opažamo jeste diskretna promenljiva  $y_t$  koja može uzeti sledeće tri vrednosti određene parametrima praga  $\mu^1$  i  $\mu^2$ :

$$y_t = \begin{cases} -1 & \text{ako } y_t^* < \mu_{n0}^1, \\ 0 & \text{ako } \mu_{n0}^1 \leq y_t^* \leq \mu_{n0}^2, \\ 1 & \text{ako } y_t^* > \mu_{n0}^2, \end{cases}$$

pri čemu parametri praga zavise od veličine uzorka ( $n$ ) u slučaju da su promenljive koje određuju  $y_t^*$  nestacionarne.

# Specifikacija modela diskretnog izbora za opisivanje politike ciljanja inflacije (II)

- Ova specifikacija opisuje sledeće odluke CB: -1 odluka o smanjenju kamatne stope, 0 odluka da se zadrži kamatna stopa na istom nivou i 1 odluka o povećanju kamatne stope.
- Podsećamo da je nakon ocene koeficijenata  $\beta$  moguće izračunati vrednost indeksne funkcije kao:

$$\hat{y}_t^* = \hat{\beta}' X_t.$$

- Monetarna politika analizirana je na podacima vremenskih serija za šest tranzicionih evropskih ekonomija koje su prihvatile politiku ciljanja inflacije: Češka, Poljska, Mađarska, Rumunija, Albanija i Srbija.
- Mesečni podaci, pri čemu je izostavljeno prvih 18-24 meseci od zvaničnog prelaska na politiku ciljanja inflacije.
- Objašnjavajuće promenljive: *inflacija*, jaz u vremenskoj seriji inflacije (*inflacija\_jaz*), proizvodni jaz (*bdp\_gap*), kamatna stopa (*ks*), jaz u vremenskoj seriji realnog deviznog kursa (*rdk\_jaz*), odnosno stopa rasta realnog deviznog kursa ( $\Delta rdk$ ). U nekima je ustanovljeno prisustvo nestacionarnosti.

# Ocene monetarne politike: zavisna promenjiva sa tri ishoda (tri odluke CB)

datum prelaska na ciljanje inflacije	Češka 1997:12	Poljska 1998:1	Mađarska 2001:8	Rumunija 2005:8	Srbija 2006:8	Albanija delimično 2004; potpuno 2008
period	1999:6-2013:12	2000:1-2013:12	2003:1-2013:12	2007:1-2013:12	2008:1-2013:12	2008:1-2013:12
<i>inflacija_jaz(-1)</i>					0.27458 (4.009)***	0.633239 (3.073)***
<i>inflacija(-1)</i>	0.1770840 (2.191)**	0.3793 (4.8363)***	0.2887450 (3.513)***	0.439933 (4.353)***		
<i>bdp_jaz(-1)</i>	0.2386180 (2.207)**	0.237648 (2.2842)**	0.496218 (5.400)***	0.512118 (4.954)***	0.327873 (2.425)**	0.480012 (2.510)**
<i>ks(-1)</i>	-0.222508 (-3.206)***	-0.154662 (-4.7092)***	-0.162921 (-2.439)**	-0.3639560 (-3.016)***		
<i>rdk_jaz(-1)</i>	0.159042 (3.965)***		0.1979170 (5.633)***		0.2718 (4.217)***	
<i>rdk_jaz(-4)</i>		0.045507 (2.4008)**				
<i>Δrdk(-2)</i>				0.225665 (2.226)**		
<i>Δrdk(-3)</i>						0.452905 (2.2639)**
$\mu_{1n}$	-1.23163 (-5.986)***	-1.1525 (-4.9701)***	-0.221265 (-0.507)	-1.077983 (-1.398)	-0.76429 (-4.366)***	-0.97960 (-4.9102)***
$\mu_{2n}$	1.59821 (7.927)***	1.44674 (5.8353)***	1.769825 (3.676)***	2.583707 (2.905)***	0.76730 (4.202)***	2.78288 (6.2778)***
Wald test ( $\mu_1 = \mu_2$ ) (prob)	1.04082 (0.299)	0.69572 (0.4876)			0.01093 (0.991)	3.70835 (0.0004)
br. opservacija	175	164	132	83	71	72
podizanje	28	39	49	21	22	12
ne menjanje	136	109	67	55	28	51
smanjenje	11	16	16	7	21	1
log. likelihood	-102.93760	-109.4430	-99.945	-42.87492	-58.76994	-31.431560
pseudo R <sup>2</sup>	0.112897	0.205673	0.217682	0.376855	0.240803	0.162414

# Ocena monetarne politike – nalazi

- Ustanovljeno je da monetarna politika centralnih banaka ovih zemalja sledi gotovo istovetan obrazac:
  - inflacija (ili njeno odstupanje od dugoročnog trenda) utiče statistički značajno na odluke centralnih banaka sa pozitivnim predznakom.
  - potvrđeno je teorijsko stanovište o statistički značajnom, pozitivnom uticaju koji na kretanje kamatne stope ima proizvodni jaz.
  - pokazano je da CB svih šest zemalja “izglašavaju” promene u kretanju kamatne stope, odnosno njeno prilagođavanje obično vrše nizom uzastopnih odluka o manjim promenama.
  - Ustanovljen je i statistički značajan uticaj deviznog kursa (CB Rumunije, Srbije i Albanije na nivo inflacije utiču aktivnom politikom deviznog kursa).
- Modeli poređanih ishoda omogućavaju i istovremeno ocenjivanje parametara praga.
- Prisustvo izvesne asimetrije sa kojom centralne banke reaguju (potrebno je manje odstupanje indeksne funkcije **za donošenje odluke o smanjenju**, nego povećanju kamatne stope) nije se pokazalo statistički značajno, osim u slučaju Albanije ( “lakše” donose odluke o smanjenju nego odluke o povećanju kamatne stope ( $|-0.98| < 2.78$ )).

# Tačna predviđanja modela

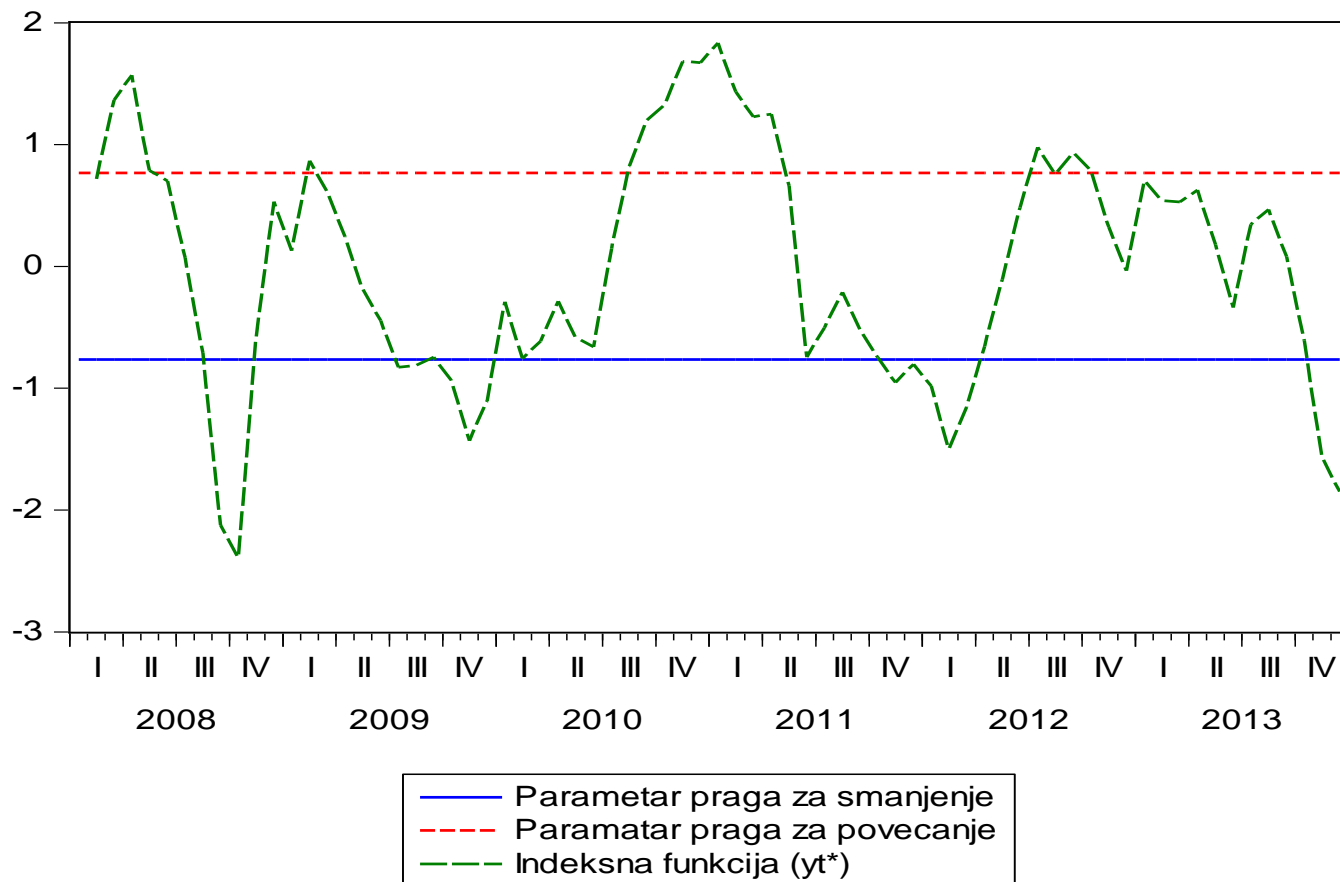
	Češka	Poljska	Mađarska	Rumunija	Srbija	Albanija
% ukupno (svih odluka)	76.57	70.73	66.67	75.9	60.56	84.72
% odluka o promeni	7.69	34.54	56.92	57.14	67.44	23.08

## Stvarne i modelom predviđene odluke o promeni kamatne stope

Češka		Stvarne odluke CB			Rumunija		Stvarne odluke CB		
		smanjenje	bez promene	povećanje			smanjenje	bez promene	povećanje
Predviđanje modela	smanjenje kamatne stope	<b>3</b>	0	0	Predviđanje modela	smanjenje kamatne stope	<b>12</b>	0	0
	bez promene	25	<b>131</b>	11	Predviđanje modela	bez promene	9	<b>47</b>	3
	povećanje kamatne stope	0	5	<b>0</b>	Predviđanje modela	povećanje kamatne stope	0	8	<b>4</b>
Poljska		Stvarne odluke CB			Srbija		Stvarne odluke CB		
		smanjenje	bez promene	povećanje			smanjenje	bez promene	povećanje
Predviđanje modela	smanjenje kamatne stope	<b>19</b>	0	0	Predviđanje modela	smanjenje kamatne stope	<b>11</b>	8	0
	bez promene	23	<b>97</b>	16	Predviđanje modela	bez promene	11	<b>16</b>	5
	povećanje kamatne stope	0	9	<b>0</b>	Predviđanje modela	povećanje kamatne stope	0	4	<b>16</b>
Mađarska		Stvarne odluke CB			Albanija		Stvarne odluke CB		
		smanjenje	bez promene	povećanje			smanjenje	bez promene	povećanje
Predviđanje modela	smanjenje kamatne stope	<b>30</b>	0	0	Predviđanje modela	smanjenje kamatne stope	<b>3</b>	0	0
	bez promene	19	<b>51</b>	9	Predviđanje modela	bez promene	9	<b>58</b>	1
	povećanje kamatne stope	0	16	<b>7</b>	Predviđanje modela	povećanje kamatne stope	0	1	<b>0</b>

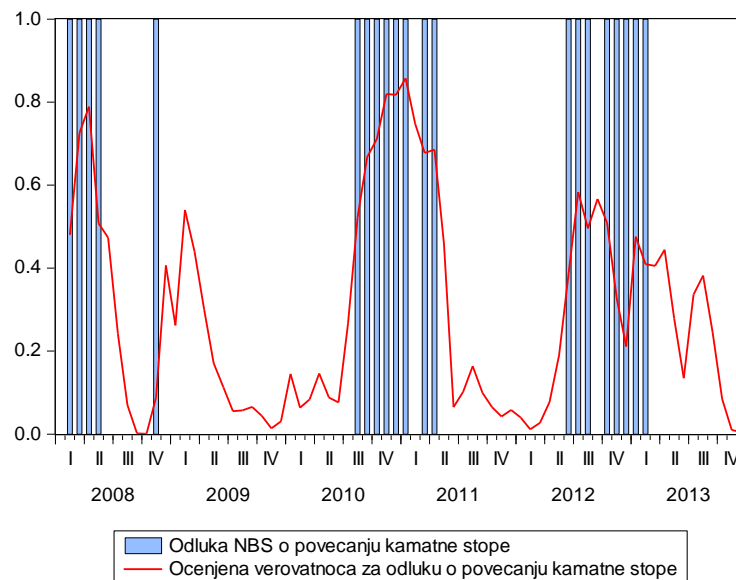
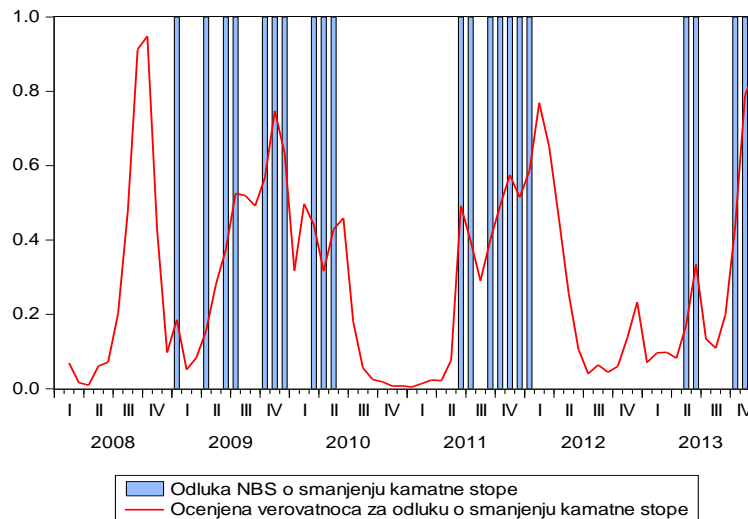


# Model za Srbiju: Ocenjena indeksna funkcija (period: 2008:1-2013:12)





# Stvarne promene kamatne stope i ocenjene verovatnoće ovih događaja za NBS



# Dalji razvoj netradicionalnih (dinamičkih) modela specifične zavisne promenljive

- Razvoj specifikacije uopštenog probit modela poređanog izbora (engl. *generalized ordered probit model*; GOPROBIT model) koji dozvoljavaju različit uticaj nekih ili svih objašnjavajućih promenljivih pri donošenju različitih odluka.
- Modeli panel podataka sa diskretnom zavisnom promenljivom, pri čemu je moguće modelirati izbor između dve ili više alternativa.

# Modeli brojivih podataka

- Modeli brojivih podataka/događaja (engl. *count data models* ili *models for event counts*) su modeli u kojima zavisna promenljiva ili promenljiva odgovora ( $y$ ) uzima cele, nenegativne vrednosti
- Primeri brojivih podataka zavisne promenljive su: broj dece rođene u određenom intervalu godina starosti majke (promenljiva relevantna za studije fertiliteta), broj korišćenja lekarskih usluga ili prijavljenih patenata od strane preduzeća u određenom intervalu vremena, broj havarija, bankrotstava i sl.
- Pri tome, slučajna promenljiva  $y$  najčešće uzima svega nekoliko vrednosti (na primer, 0, 1 i 2), ima raspodelu asimetričnu u levo, a u modelu je prisutna heteroskedastičnost (varijansa slučajne greške raste uporedo sa rastom aritmetičke sredine promenljive  $y$ ).

# Modeli prebrojivih podataka

- Najpoznatiji Poisson-ov model, koji pretpostavlja da svako  $y_i$  predstavlja jedno izvlačenje iz Poisson-ove raspodele sa parametrom  $\lambda_i$ :

$$\text{Pr ob}(Y_i = y_i) = \frac{e^{-\lambda_i} \lambda_i^{y_i}}{y_i!}, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

pri čemu su prva dva momenta ove raspodele:  $E(y_i) = \lambda_i$  i  $\text{var}(y_i) = \lambda_i$ .

- Važno je naglasiti da je ovo ograničenje vrlo restriktivno, jer u praksi često postoji preterana disperzija (dobijaju se ocene sa veoma potcenjenim standardnim greškama).
- Prekomerna disperzija je posledica heterogenost opservacija (ocene koef. nisu iste za sve opservacije iz uzorka), kao i prisustvo velikog broja nula.
- Predložena je generalizacija Poissonov-og modela (specifikacije negativni binomni model I i II).