Rešenje II kontrolnog testa:

1. ZADATAK

a)

$$b_1 = \frac{\sum x_{1t} y_t}{\sum x_{1t}^2} = \frac{1007.846}{981.688} = \mathbf{1.026}$$

$$b_0 = \bar{Y} - b_1 \bar{X}_1 = 19.58 - 1.026 * 28.932 = \mathbf{-10.104}$$

Ako se nezavisna promenljiva X_1 poveća za jednu jedinicu, zavisna promenljiva će se povećati za 1.026 jedinica.

$$\Sigma e_t^2 = \Sigma y_t^2 - b_1 \Sigma x_{1t} y_t = 70328.97 - 1.026 * 1007.846 = 69294.92$$

$$s^2 = \frac{\Sigma e_t^2}{n-k} = \frac{69294.92}{500-2} = 139.15$$

$$s_{b_1}^2 = \frac{s^2}{\sum x_{1t}^2} = \frac{139.15}{981.688} = 0.142$$

$$\boldsymbol{s_{b_1} = 0.376}$$

$$s_{b_0}^2 = s^2 \cdot \left(\frac{1}{n} + \frac{(\bar{X}_1)^2}{\sum x_{1t}^2}\right) = 118.923$$

$$\boldsymbol{s_{b_0} = 10.905}$$

$$\boldsymbol{\hat{Y}_t = -10.104 + 1.026 X_{1t}}$$
$$\boldsymbol{(10.905) \quad (0.376)}$$

$$H_0: \beta_1 = 0$$
$$H_1: \beta_1 \neq 0$$

$$t_{b1} = \frac{b_1}{s_{b1}} = \frac{1.026}{0.376} = 2.728$$

$$t_{n-k}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = t_{498}(0.025) = 1.96$$

$\boldsymbol{t_{b1} > t_{498}(0.025)}$ **-> Na nivou značajnosti od 5% odbacujemo $\boldsymbol{H_0}$ i zaključujemo da je parametar $\boldsymbol{\beta_1}$ statistički značajan.**

$$H_0: \beta_0 = 0$$
$$H_1: \beta_0 \neq 0$$

$$t_{b_0} = \frac{b_0}{s_{b_0}} = \frac{-10.104}{10.905} = -0.926$$

$$t_{n-k}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = t_{498}(0.025) = 1.96$$

$\boldsymbol{t_{b_0} < t_{498}(0.025)}$ **-> Na nivou značajnosti od 5% prihvatamo $\boldsymbol{H_0}$ i zaključujemo da parametar $\boldsymbol{\beta_0}$ nije statistički značajan.**

$H_0: R^2 = 0$
$H_1: R^2 \neq 0$

$$R^2 = 1 - \frac{\sum e_t^2}{\sum y_t^2} = 1 - \frac{69294.92}{70328.97} = 0.015$$

$$F = \frac{R^2 \ / \ (k-1)}{(1-R^2) \ / \ (n-k)} = \frac{R^2(n-2)}{(1-R^2)} = \frac{0.015 \cdot (500-2)}{(1-0.015)} = 7.58$$

$F_{498}^{1}(0.05) = 3.84$

F > $F_{498}^{1}(0.05)$ -> Na nivou značajnosti od 5% odbacujemo H_0 i zaključujemo da je cela regresija statistički značajna.

b)

Elastičnost je $\mathbf{1.516}$. (Podsetiti se tabele 3.6)

c)

$$d = \frac{\sum_{t=2}^{500} (e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{500} e_t^2} = \frac{14.326}{15.348} = \mathbf{0.93}$$

Izračunata statistika je manja od 2 -> Testiramo postojanje pozitivne autokorelacije.

$H_0: \rho = 0$

$H_1: \rho > 0$

Za k'=1 i n=500 kritične vrednosti su: d_d=1.65 i d_g=1.69.

Pošto je d< d_d zaključujemo da je u modelu prisutna pozitivna autokorelacija prvog reda.

d)

$b_1 \Sigma x_{1t}^2 + b_2 \Sigma x_{1t} x_{2t} = \Sigma x_{1t} y_t$

$b_1 \Sigma x_{1t} x_{2t} + b_2 \Sigma x_{2t}^2 = \Sigma x_{2t} y_t$

$b_0 = \bar{Y} - b_1 \bar{X}_1 - b_2 \bar{X}_2$

Sistem jednačina:

$981.688 b_1 - 69.556 b_2 = 1007.846$

$-69.556 b_1 + 3754.002 b_2 = 4751.511$

Rešenje: $\boldsymbol{b_1 = 1.118}$

$\boldsymbol{b_2 = 1.286}$

$\boldsymbol{b_0} = \bar{Y} - b_1 \bar{X}_1 - b_2 \bar{X}_2 = \mathbf{-31.88}$

Ako se X_1 poveća za 1 jedinicu Y će se povećati za 1.118 jedinica, pod uslovom da X_2 ostane nepromenjeno.

Ako se X_2 poveća za jednu jedinicu Y će se povećati za 1.286 jedinica, pod uslovom da X_1 ostane nepromenjeno.

Intervali poverenja za nepoznate parametra modela β_1 i β_2 su:

$$b_1 - t_{n-k}\left(\frac{\alpha}{2}\right) s_{b_1} \leq \beta_1 \leq b_1 + t_{n-k}\left(\frac{\alpha}{2}\right) s_{b_1}$$

$$\Sigma e_t^2 = \Sigma yt^2 - b_1 \Sigma x_{1t} y_t - b_2 \Sigma x_{2t} y_t = 63089.92$$

$$s^2 = \frac{\Sigma e_t^2}{n-k} = \frac{63089.92}{500-3} = 126.94$$

$$r = \frac{\sum x_{1t} x_{2t}}{\sqrt{\sum x_{1t}^2 \sum x_{2t}^2}} = -0.04 \quad \text{->} \; r^2 = 0.0013$$

$$s_{b_1}^2 = \frac{s^2}{(1-r^2)\sum x_{1t}^2} = 0.129$$

$$\boldsymbol{s_{b_1} = 0.36}$$

$$t_{n-k}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = t_{497}(0.025) = 1.96$$

$$1.118 - 1.96 \cdot 0.36 \leq \beta_1 \leq 1.118 + 1.96 \cdot 0.36$$

$$\boldsymbol{0.41 \leq \beta_1 \leq 1.82}$$

$$b_2 - t_{n-k}\left(\frac{\alpha}{2}\right) s_{b_2} \leq \beta_2 \leq b_2 + t_{n-k}\left(\frac{\alpha}{2}\right) s_{b_2}$$

$$s_{b_2}^2 = \frac{s^2}{(1-r^2)\sum x_{2t}^2} = 0.034$$

$$\boldsymbol{s_{b_2} = 0.184}$$

$$1.286 - 1.96 \cdot 0.184 \leq \beta_2 \leq 1.286 + 1.96 \cdot 0.184$$

$$\boldsymbol{0.92 \leq \beta_2 \leq 1.65}$$

Sa verovatnoćom 95% očekujemo da se stvarna vrednost parametra $\boldsymbol{\beta_1}$ nađe u intervalu $[\mathbf{0.41}; \mathbf{1.82}]$, a parametar $\boldsymbol{\beta_2}$ u intervalu $[\mathbf{0.92}; \mathbf{1.65}]$.

$$\boldsymbol{\hat{Y}_t = -31.88 + 1.118 X_{1t} + 1.286 X_{2t}}$$
$$\qquad\qquad\qquad (\mathbf{0.36}) \qquad\quad (\mathbf{0.184})$$

Intervali poverenja mogu se koristiti za testiranje statističke značajnosti parametara. Nultu hipotezu, da parametar nije statistički značajan, odbacujemo ako se 0 ne nalazi unutar intervala poverenja.

S obzirom da se 0 ne nalazi unutar intervala poverenja za parametre $\boldsymbol{\beta_1}$ i $\boldsymbol{\beta_2}$, na nivou značajnosti od 5% zaključujemo da su oni statistički značajni.

e)

T: $\hat{Y}_t = -31.88 + 1.118X_{1t} + 1.286X_{2t}$

⊥: $\hat{Y}_t = -10.104 + 1.026X_{1t}$

Pr(b_1) $= b_2 * p^*$

$\hat{X}_{2t} = p_0 + p^* * X_{1t}$

Pr(b_1) $= b_2 * p^* = b_2 * \frac{\sum x_{1t}x_{2t}}{\sum x_{1t}^2} = 1.286 * \frac{-69.556}{981.688} = \mathbf{-0.09}$ (Ocena je pristrasna naniže)

Ili

$Pr(b_1) = b_{1\perp} - b_{1T} = 1.026 - 1.118 = \mathbf{-0.09}$

f)

Koristimo Breusch-Godfrey test.

H_0: $\rho_1 = 0$

H_1: $\rho_1 \neq 0$

$GB = T * R^2 = 500 * 0.006 = 3$

$\chi_1^2(\alpha = 0.05) = 3.841$

$\boldsymbol{GB}$ < $\boldsymbol{\chi_1^2(\alpha = 0.05)}$ -> Na nivou značajnosti od 5% odbacujemo $\boldsymbol{H_1}$ i zaključujemo da u modelu nije prisutna autokorelacija prvog reda.

g)

Autokorelacija je **lažna** po prirodi (nastala kao posledica izostavljanja relevantne promenljive iz modela).

h)

Koristimo White-ov test.

H_0: $VAR(\varepsilon_i) = \delta^2$

H_1: $VAR(\varepsilon_i) = \delta_i^2$

$WH = n \cdot R^2 = 500 * 0.02 = 10$

$\chi_5^2(\alpha = 0.05) = 11.07$

$\boldsymbol{WH}$ < $\boldsymbol{\chi_5^2(\alpha = 0.05)}$ -> Na nivou značajnosti od 5% odbacujemo $\boldsymbol{H_1}$ i zaključujemo da u modelu nije prisutna heteroskedastičnost.